La science quantique:

Une vision singulière

Résumé: photon

P.A. Besse

Relation Onde $\leftarrow\rightarrow$ particule

Paramètres d'une onde:

$\begin{pmatrix} \omega \\ \vec{K} \end{pmatrix}$ Fréquence de l'onde / Vecteur d'onde

«quadri-vecteur»

Paramètres d'une particule:

$\begin{pmatrix} E \\ \vec{P} \end{pmatrix}$ Energie de la particule / Impulsion de la particule

«quadri-vecteur»

Nobel 1918

Relation de Planck

$$\begin{pmatrix} E \\ \vec{P} \end{pmatrix} = \hbar \cdot \begin{pmatrix} \omega \\ \vec{K} \end{pmatrix}$$

Relation de De Broglie

Nobel 1929

PAB

Résumé pour les photons

Amplitude:

$$\mu(\vec{x},t)$$

$$\mu = \begin{matrix} E_x, E_y, E_z \\ D_x, D_y, D_z \\ B_x, B_y, B_z \\ H_x, H_y, H_z \\ \varphi, A_x, A_y, A_z \end{matrix}$$

Relation de dispersion:

$$E^2 = c^2 \cdot \left(P_x^2 + P_y^2 + P_z^2\right)$$

Equation d'onde de Maxwell:

$$\frac{\partial^2}{\partial(ct)^2}\mu = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\mu$$

Paramètres onde-particule:

$$\begin{pmatrix} E \\ \vec{P} \end{pmatrix} = \hbar \cdot \begin{pmatrix} \omega \\ \vec{K} \end{pmatrix}$$

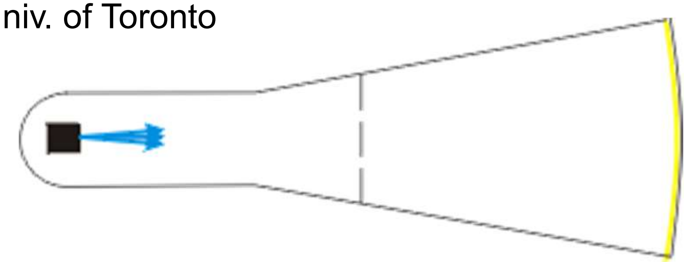
La science quantique
Une vision singulière

II) L'électron

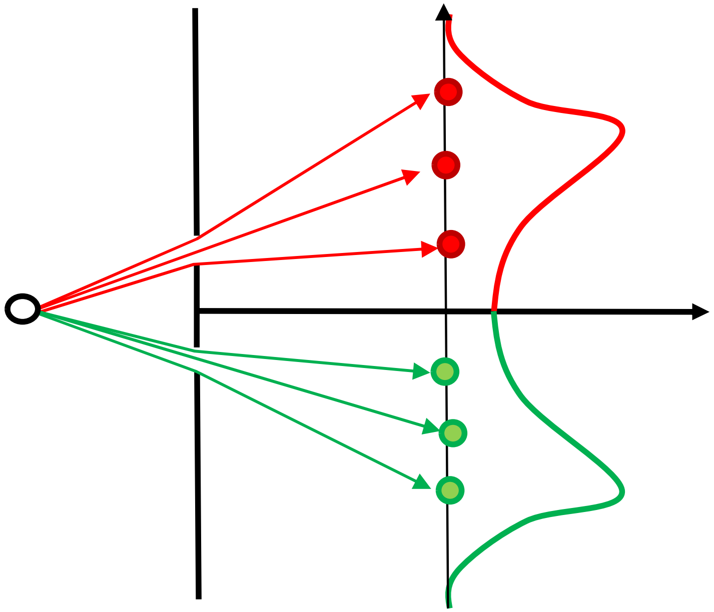
P.A. Besse

Interférences d'électrons:
(fentes de Young électroniques)

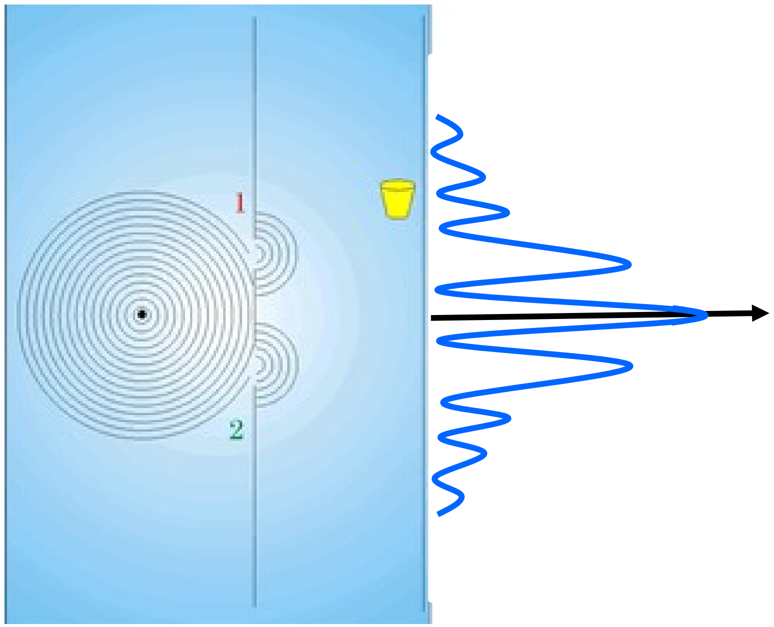
Inspiré de D. M. Harrison, Univ. of Toronto



Hypothèse «particules»

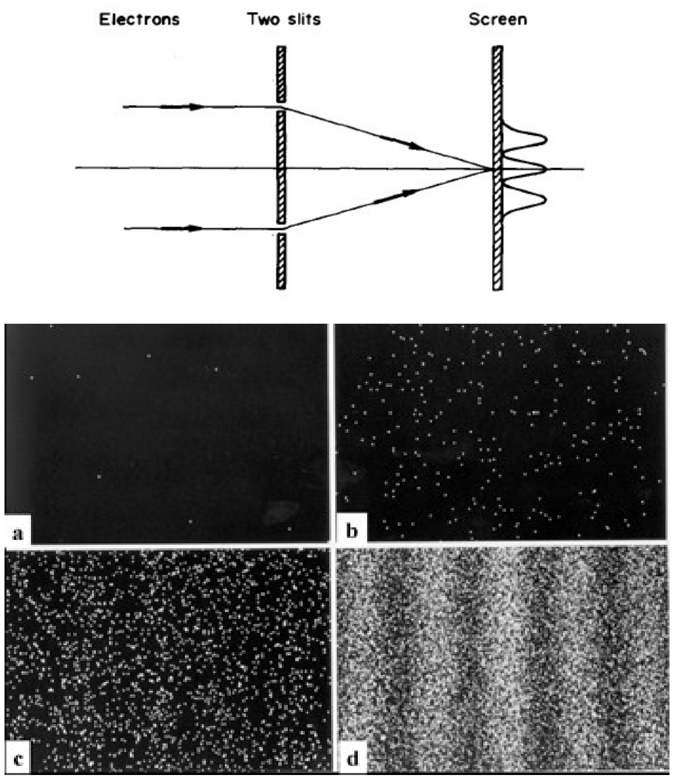


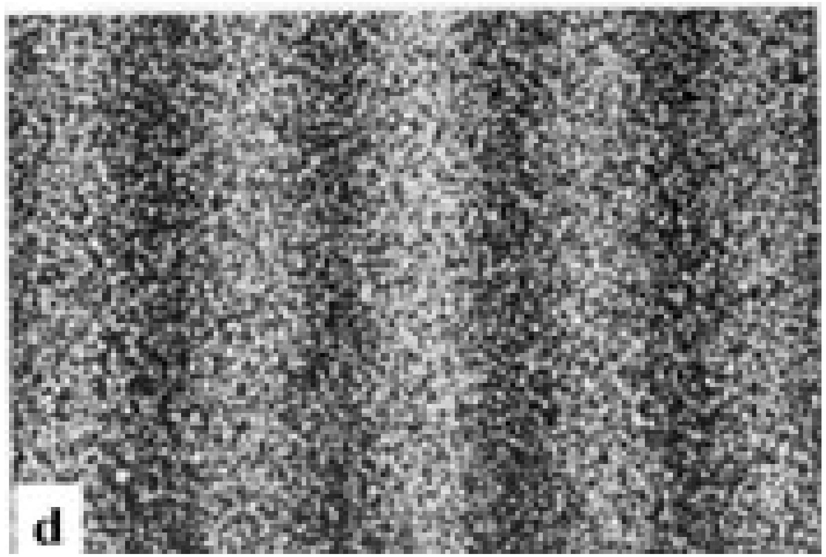
Hypothèse «ondes»



Particule / Onde
Motivation: interférences d'électrons

Double-slit experiment with single electron





http://www.hqrd.hitachi.co.jp/em/movie/doubleslite-n.wmv

A. Tonomura, Am. J. Phys. 57 (2), 1989, pp. 117-120

Onde pour l'électron

Interférences → l'électron se comporte aussi comme une onde

Fonctions d'onde: $$\left|\psi(\vec{x},t)\right\rangle$$

Exemple: fonctions harmoniques (sin, cos, …)

$$\boxed{\left|\psi(\vec{x},t)\right\rangle \approx e^{i(\vec{K}\vec{x}-\omega t)}}$$

PAB

Opérateurs «dérivées» (1)

Fonction d'onde:

$$\boxed{\left|\psi(\vec{x},t)\right\rangle \approx e^{i(\vec{K}\vec{x}-\omega t)}}$$

Opérateur d'impulsion:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left|\psi(\vec{x},t)\right\rangle = ik_x \cdot \left|\psi(\vec{x},t)\right\rangle = i\frac{p_x}{\hbar}\cdot\left|\psi(\vec{x},t)\right\rangle \quad \Longrightarrow \quad \vec{P} \equiv -i\hbar\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdots,\quad \frac{\partial}{\partial y}\cdots,\quad \frac{\partial}{\partial z}\cdots\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left|\psi(\vec{x},t)\right\rangle = -k_x^2 \cdot \left|\psi(\vec{x},t)\right\rangle = -\frac{p_x^2}{\hbar^2}\cdot\left|\psi(\vec{x},t)\right\rangle \quad \Longrightarrow \quad \left|\vec{P}\right|^2 \equiv -\hbar^2\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\cdots$$

PAB

Opérateurs «dérivées» (2)

Fonction d'onde:

$$\boxed{\left|\psi(\vec{x},t)\right\rangle \approx e^{i(\vec{K}\vec{x}-\omega t)}}$$

Opérateur d'énergie:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi(\vec{x},t)\right\rangle = -i\omega\cdot\left|\psi(\vec{x},t)\right\rangle = -i\frac{E}{\hbar}\cdot\left|\psi(\vec{x},t)\right\rangle \quad \Longrightarrow \quad E \equiv i\hbar\cdot\frac{\partial}{\partial t}\cdots$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left|\psi(\vec{x},t)\right\rangle = -\omega^2\cdot\left|\psi(\vec{x},t)\right\rangle = -\frac{E^2}{\hbar^2}\cdot\left|\psi(\vec{x},t)\right\rangle \quad \Longrightarrow \quad E^2 \equiv -\hbar^2\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\cdots$$

PAB

Equation de Schroedinger (1)

Expression «classique» de l'énergie d'une particule «massique»:

$$E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{\left|\vec{P}\right|^2}{2m} + V$$

Opérateur quantique:

$$\left|\vec{P}\right|^2 \equiv -\hbar^2 \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \dots$$

$$\Downarrow$$

Hamiltonien quantique H:

$$\boxed{H = \frac{\left|\vec{P}\right|^2}{2m} + V = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V}$$

Equation de Schroedinger (2)

Hamiltonien quantique H:

$$H = \frac{\left|\vec{P}\right|^2}{2m} + V = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + V \quad = E$$

Opérateur quantique:

$$E \equiv i\hbar \cdot \frac{\partial}{\partial t} \cdots$$

Equation de Schroedinger:

$$i\hbar \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left|\psi\right\rangle = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + V\right] \cdot \left|\psi\right\rangle = H \cdot \left|\psi\right\rangle$$

Nobel 1933

Interprétation

photons

amplitude

$$\mu(x,t) = \mu_1(x,t) + \mu_2(x,t)$$

intensité

$$I(x,t) \equiv |\mu|^2 = |\mu_1|^2 + |\mu_2|^2 + 2\cdot|\mu_1|\cdot|\mu_2|\cdot\cos(\Delta\varphi)$$

électrons

Fonction d'onde

$$\psi(x,t) = \psi_1(x,t) + \psi_2(x,t)$$

Probabilité de trouver un électron

$$|\psi(x,t)|^2 \equiv \psi^* \cdot \psi = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + 2\cdot|\psi_1|\cdot|\psi_2|\cdot\cos(\Delta\varphi)$$

Résumé pour les électrons

Fonction d'onde:

$$\left|\psi(\vec{x},t)\right\rangle$$

Relation de dispersion:

$$H \equiv E = \left[\frac{\left(P_x^2 + P_y^2 + P_z^2\right)}{2m} + V(\vec{x},t)\right]$$

Equation de Schroedinger:

$$i\hbar \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left|\psi\right\rangle = H \cdot \left|\psi\right\rangle = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + V\right] \cdot \left|\psi\right\rangle$$

Paramètres onde-particule:

$$\begin{pmatrix} E \\ \vec{P} \end{pmatrix} = \hbar \cdot \begin{pmatrix} \omega \\ \vec{K} \end{pmatrix}$$

PAB

Exemples d'Hamiltoniens

Energie cinétique: $H_{cin} = \dfrac{1}{2m} P^2$

Energie potentielle d'un ressort: $H_{\kappa} = \dfrac{\kappa}{2} X^2$

Energie potentielle: $H_{pot} = (-q) \cdot \varphi$

Energie potentielle de Coulomb $H_q = -\left(\dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \right) \cdot \dfrac{1}{r}$

Energie électrique: $H_E = \dfrac{\varepsilon_0}{2} E^2$

Energie magnétique: $H_B = \dfrac{1}{2\mu_0} B^2$

Energie capacitive: $H_C = \dfrac{1}{2C} Q^2$

Energie inductive $H_L = \dfrac{1}{2L} \phi^2$

Flux magnétique

Energie d'interaction électromagnétique: $H_{\text{inter}} = -\vec{m} \cdot \vec{B}$

Moment magnétique

Interactions spin-spin: $H_J \cong -\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$

Interactions courant-champ magnétique: $H_A \cong -\vec{j} \cdot \vec{A}$

...

Equation de Schroedinger

Solutions:

1) Propagateur

2) Modes propres

1) Equation de Schroedinger: solution par «propagateur»

$$i\hbar \cdot \frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = H \cdot |\psi\rangle$$

avec

$$|\psi_0\rangle = |\psi(x,0)\rangle$$

$\Rightarrow$

Opérateur Hamiltonien

Fonction d'onde à l'origine (t=0)

$$|\psi(x,t)\rangle = e^{-i\frac{H}{\hbar}\cdot t} \cdot |\psi_0\rangle$$

propagateur

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t) = \alpha \cdot f(t) \quad \Rightarrow f(t) = f(0) \cdot e^{\alpha \cdot t}$$

PAB

2) Equation de Schroedinger: solution par «modes propres» et produit scalaire

A) Développer la fonction d'onde dans la base orthogonale des vecteurs propres de H

$$\left|\psi_0\right\rangle = \left|\psi(x,0)\right\rangle = \sum_n \alpha_n \cdot \left|\varphi_n(x)\right\rangle$$

avec

$$\boxed{\alpha_n = \left\langle \varphi_n(x) \middle| \middle| \psi_0(x) \right\rangle}$$

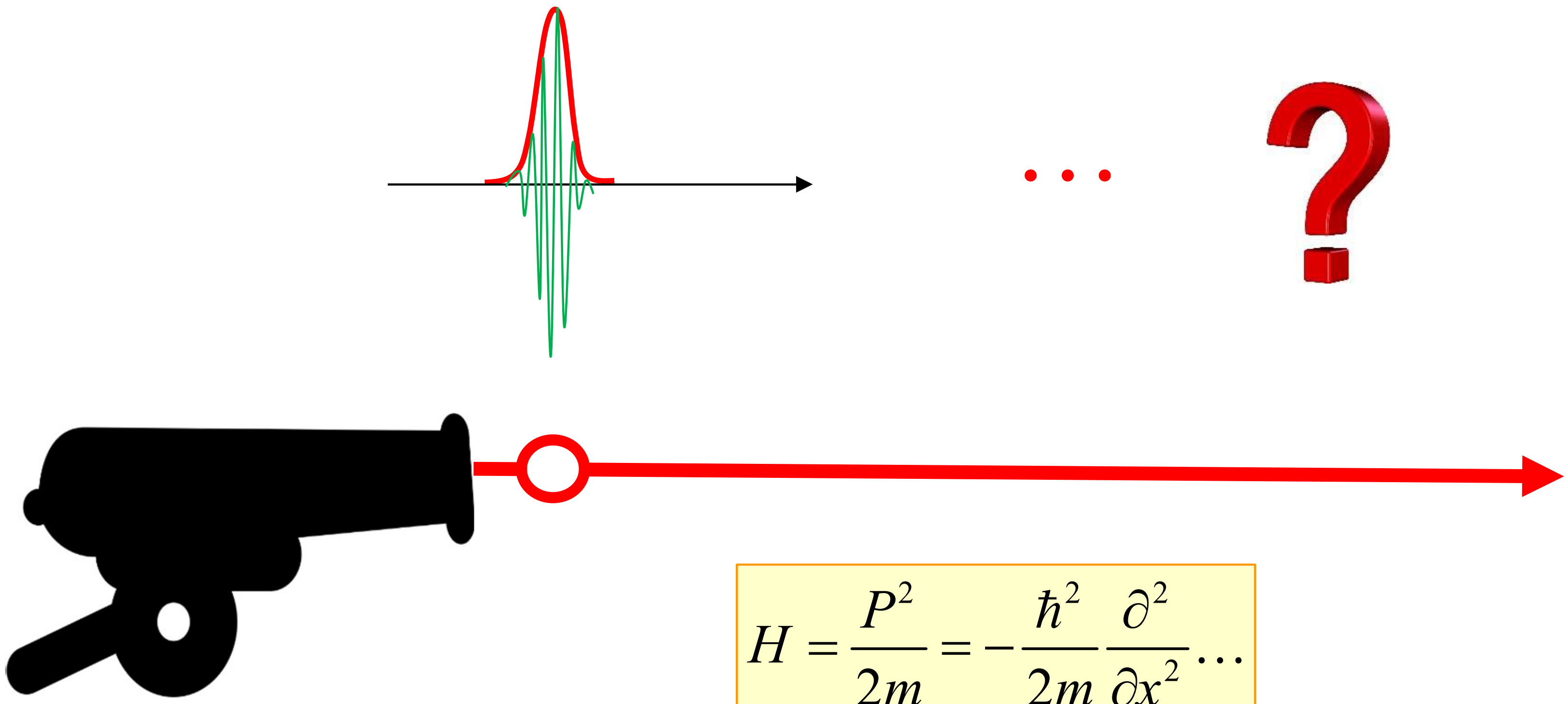
Spectre par produit scalaire

B) Laisser propager chaque mode propre avec sa valeur propre E_n

Dans la base orthogonale de ses vecteurs propres, l'Hamiltonien est diagonal

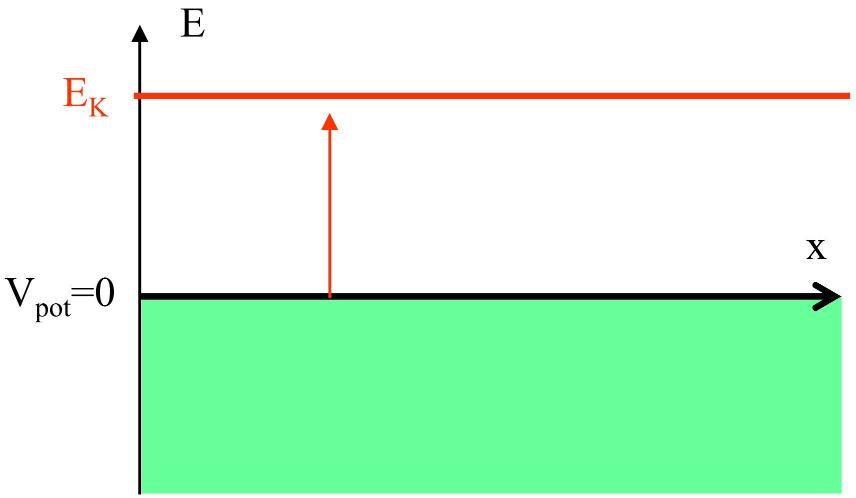
$$\left|\psi(x,t)\right\rangle = \sum_n \alpha_n \cdot e^{-i\frac{E_n}{\hbar}\cdot t} \cdot \left|\varphi_n(x)\right\rangle$$

Exemple:
Propagation d’un électron dans le vide



$$H = \frac{P^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ldots$$

Modes propres dans le vide (V$_{pot}$=0)



Modes propres de l'Hamiltonien

$$\boxed{H = \frac{P^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ldots}$$

$$\boxed{\varphi_K(x,0) = A\cdot e^{iK\cdot x}}$$

Modes de Fourier

$$\Rightarrow \quad H\cdot|\varphi_K\rangle = \left(\frac{\hbar^2}{2m}K^2\right)\cdot|\varphi_K\rangle \equiv E_K\cdot|\varphi_K\rangle$$

Valeur propre   Mode propre

Propagation selon l'équation de Schroedinger:

$$i\hbar\cdot\frac{\partial}{\partial t}|\varphi_K\rangle = E_K\cdot|\varphi_K\rangle \quad \Rightarrow \varphi_K(x,t) = \varphi_K(x,0)\cdot e^{\frac{E_K}{i\hbar}\cdot t}$$

$$\boxed{\varphi_K(x,t) = A_K\cdot e^{iK\cdot x}\cdot e^{-i\omega_K t}}$$

avec

$$\boxed{\omega_K \equiv \left(\frac{\hbar}{2m}K^2\right)}$$

Fréquence pour l'évolution du mode propre

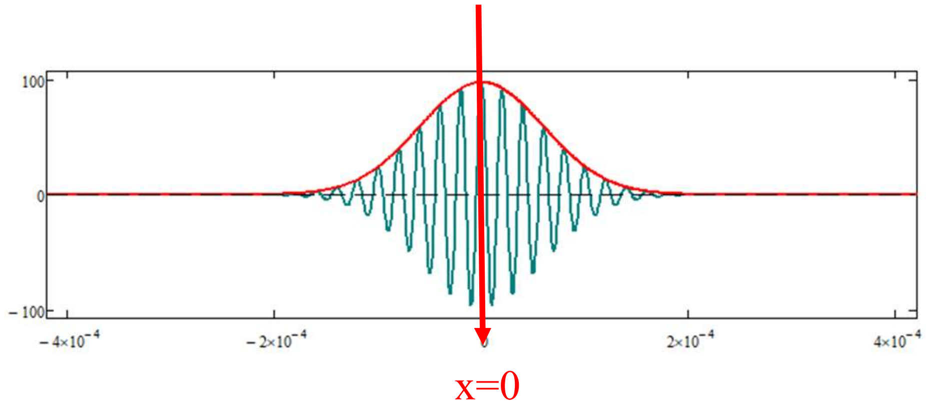
Bit électronique

Amplitude en t=0

enveloppe

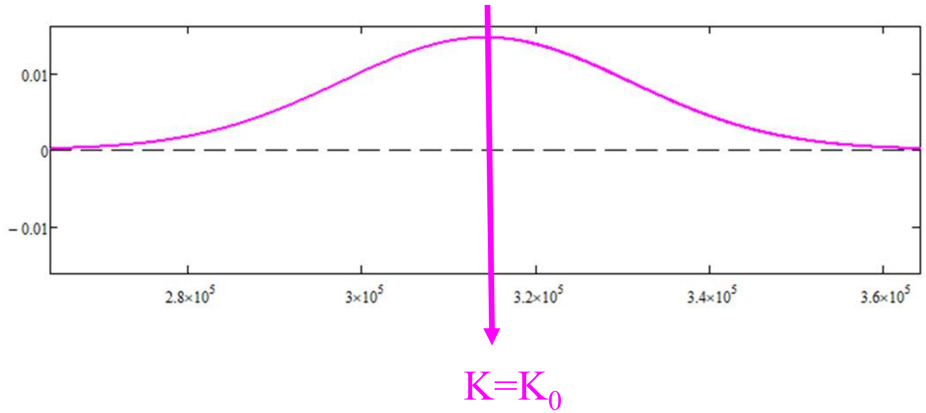
$$\left|\psi_0(x)\right\rangle = \left(\frac{1}{\pi\cdot\sigma_0^2}\right)^{1/4}\cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}}\cdot e^{iK_0x}$$

Porteuse



Transformée de Fourier en t=0

$$\left|\tilde{\psi}_0(K)\right\rangle = \left(4\pi\sigma_0^2\right)^{1/4}\cdot e^{-\frac{\sigma_0^2(K-K_0)^2}{2}}$$



Variance en x: $\sigma_x^2 = \sigma_0^2$

Variance en K: $\sigma_K^2 = 1/\sigma_0^2$

Propagation du bit électronique

Propagation dans l'espace de Fourier

Propagation

$$\left|\tilde{\psi}(K,t)\right\rangle = \left(4\pi\sigma_0^2\right)^{1/4} \cdot e^{-\frac{\sigma_0^2 (K-K_0)^2}{2}} \cdot e^{-i\omega_K t}$$

$$\omega_K = \frac{\hbar}{2m} \cdot K^2$$

Retour dans l'espace x par transformée de Fourier inverse:

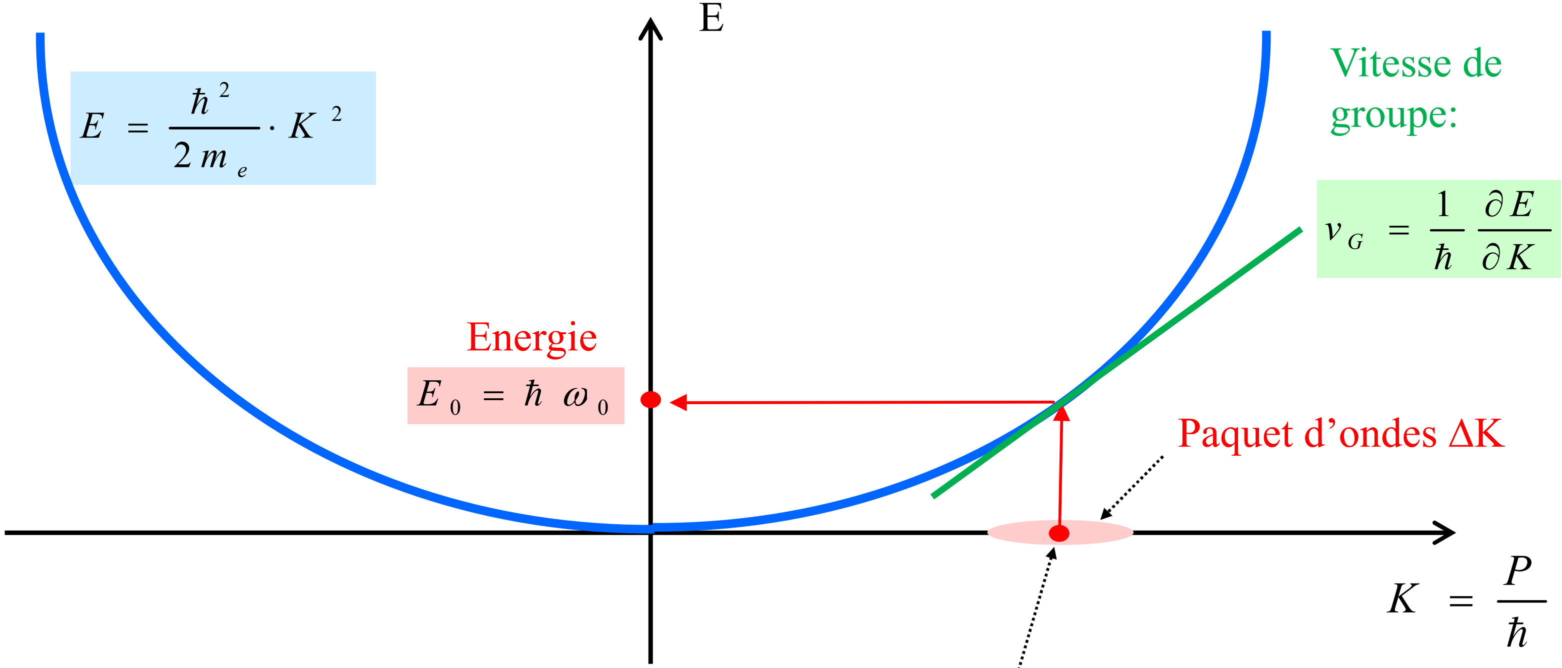
$$\boxed{\left|\psi(x,t)\right\rangle \approx \left(\frac{1}{\pi \cdot \sigma^2}\right)^{1/4} \cdot e^{-\frac{(x-v_G t)^2}{2\sigma^2}}}$$

Vitesse de groupe: $v_G \equiv \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial K}\bigg|_{K=K_0} = \frac{\hbar K_0}{m}$

Dispersion: $\sigma = \sigma_0 \cdot \sqrt{1+\left(\hbar\, t / m\sigma_0^2\right)^2}$

PAB

Relation de dispersion dans le vide



$$E = \frac{\hbar^2}{2m_e} \cdot K^2$$

Vitesse de groupe:

$$v_G = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial K}$$

Energie

$$E_0 = \hbar \omega_0$$

« onde porteuse K_0»

Masse:

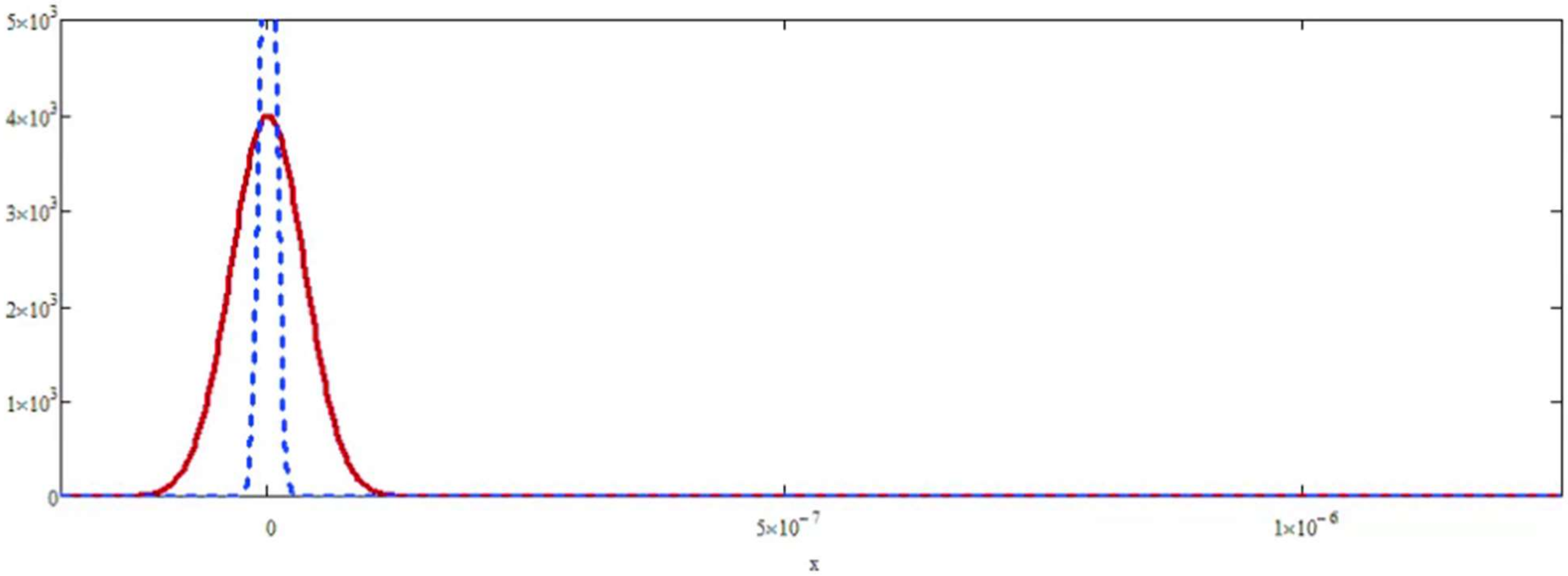
$$\frac{1}{m_e} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 E}{\partial K^2}$$

Impulsion:

$$P_0 = \hbar K_0$$

Exemple (1)

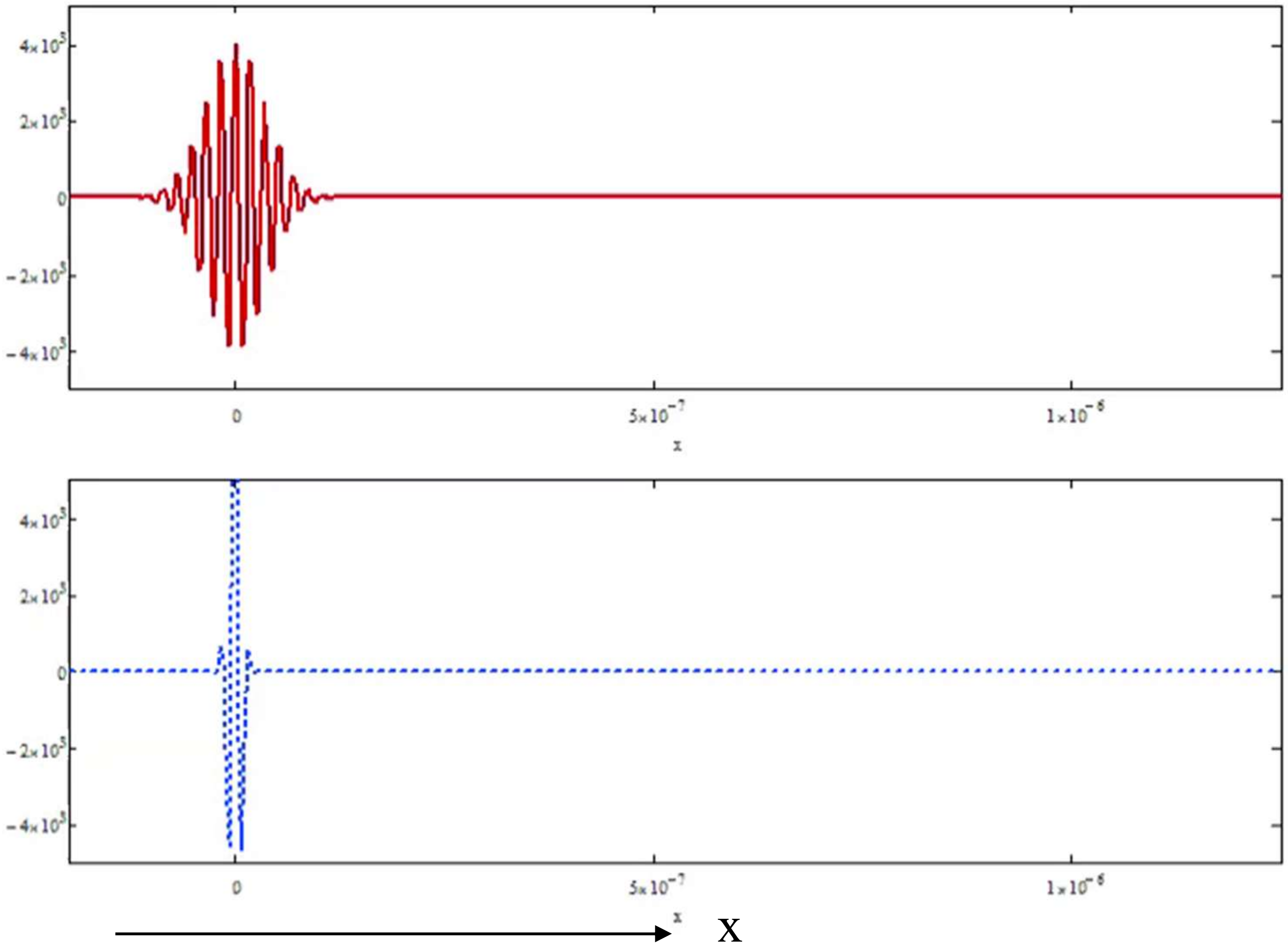
Propagation deux particules de localisation σ_0 différentes:



$$\sigma = \sigma_0 \cdot \sqrt{1 + \left(\hbar\, t / m\sigma_0^2\right)^2}$$

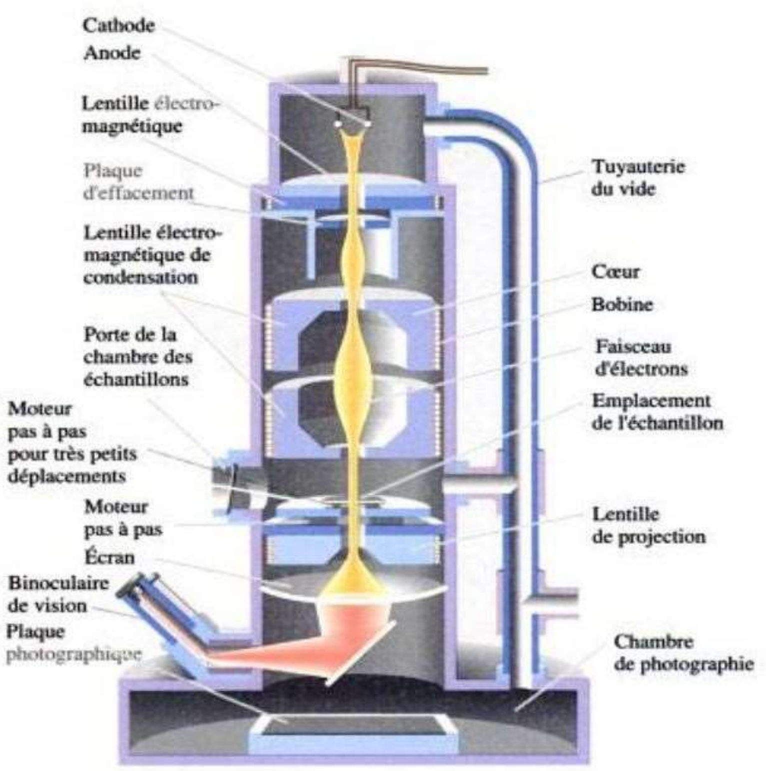
x

Vitesse de phase et vitesse de groupe



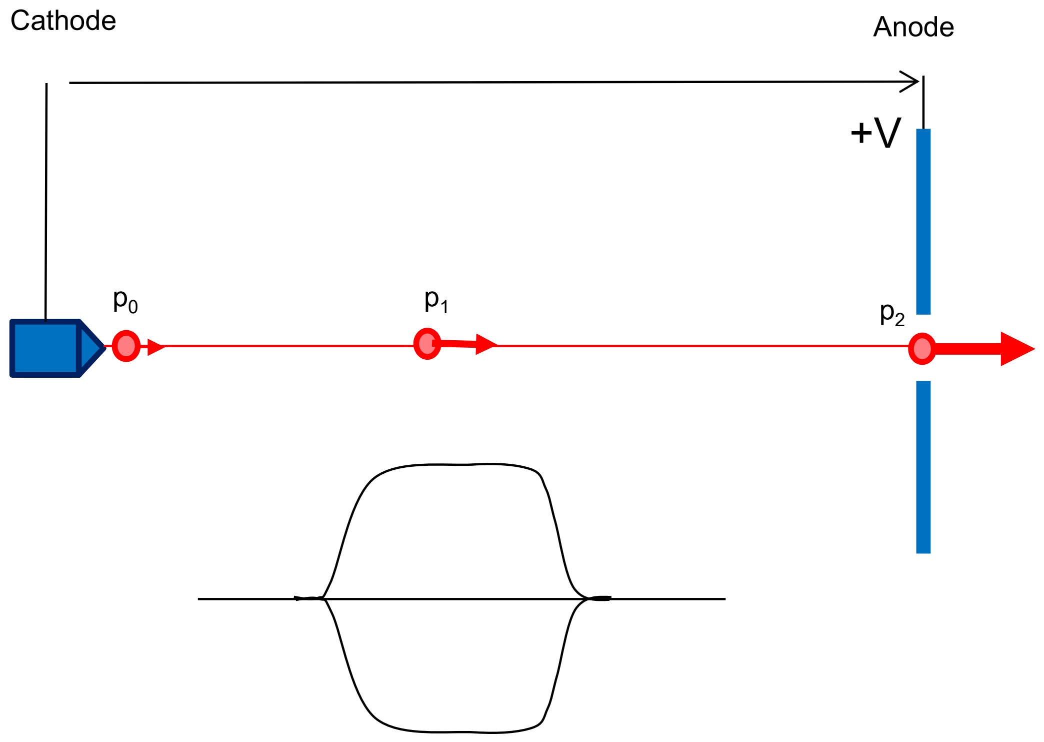
Exemple: microscope électronique

TEM principle

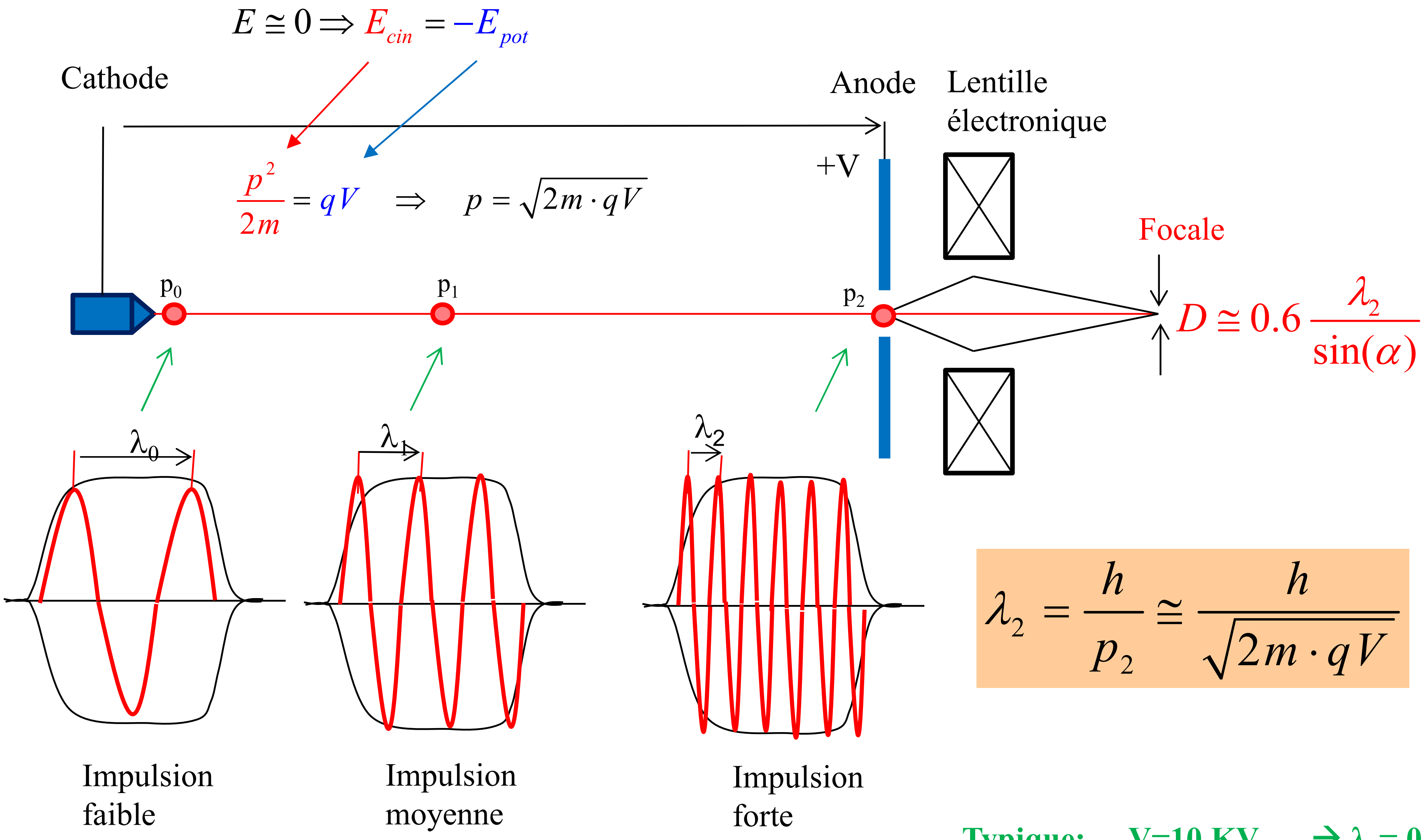


Eugene Hecht, « Physique », p. 1171

Canon à électrons simplifié



Microscope électronique: canon à électrons

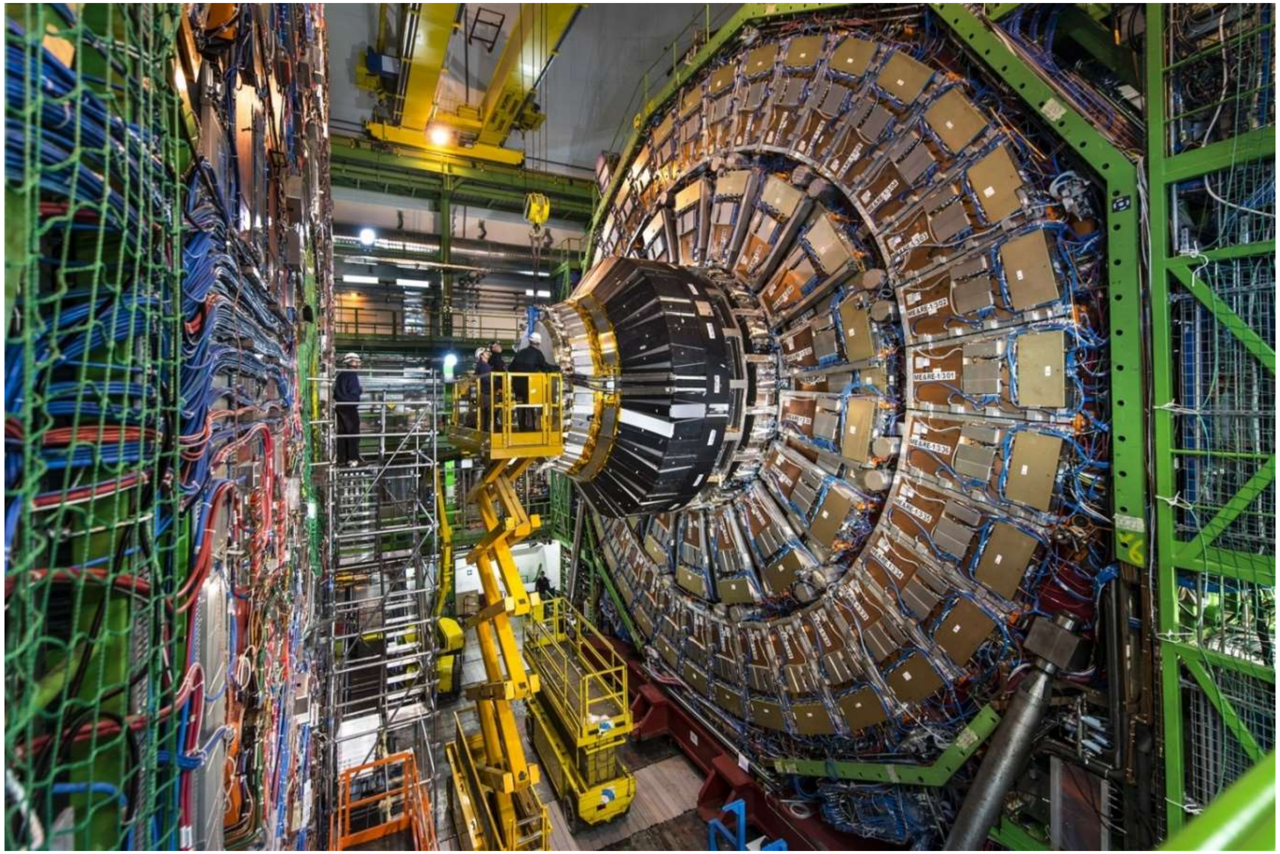


$$\lambda_2 = \frac{h}{p_2} \cong \frac{h}{\sqrt{2m \cdot qV}}$$

Typique: **V=10 KV** → **λ_2= 0.1 Å**
sin(α)=10^{-2} → **D = 5 Å**

PAB

Quel est le «microscope» le plus puissant au monde ?

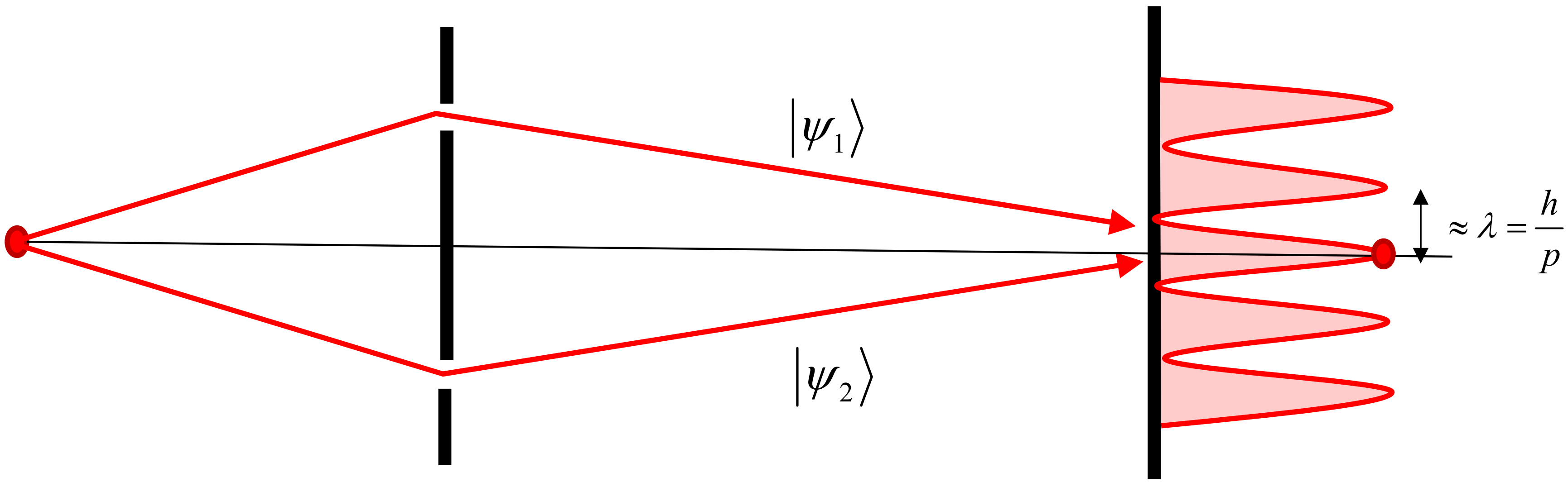


… le LHC (Large Hardron Collider)

$$\lambda_2 = \frac{h}{p_2} \cong \frac{h}{\sqrt{2m \cdot qV}}$$

PAB

Retour sur les interférences **d'électrons**



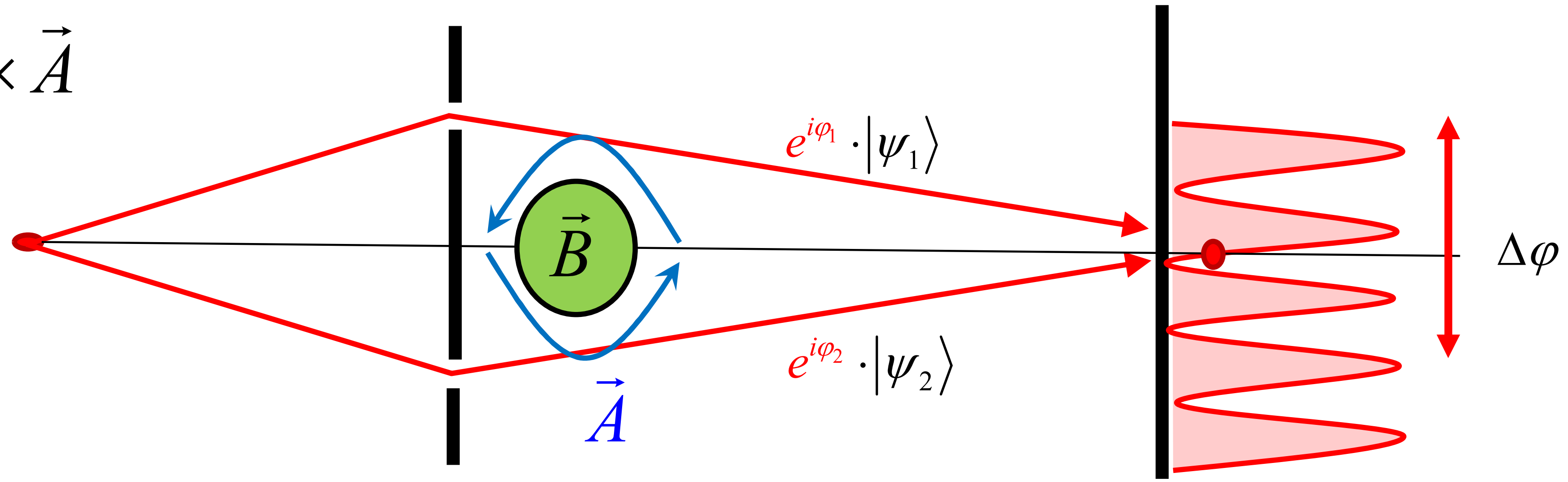
Hamiltonien:

$$H = \frac{1}{2m_e}\left(\vec{P}\right)^2 = \frac{1}{2m_e}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\right)^2$$

Modes propres: $|\psi_1\rangle$ $|\psi_2\rangle$

Effet Aharonov-Bohm

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$



Hamiltonien:

$$H = \frac{1}{2m_e}\left(\vec{P} - q\vec{A}\right)^2$$

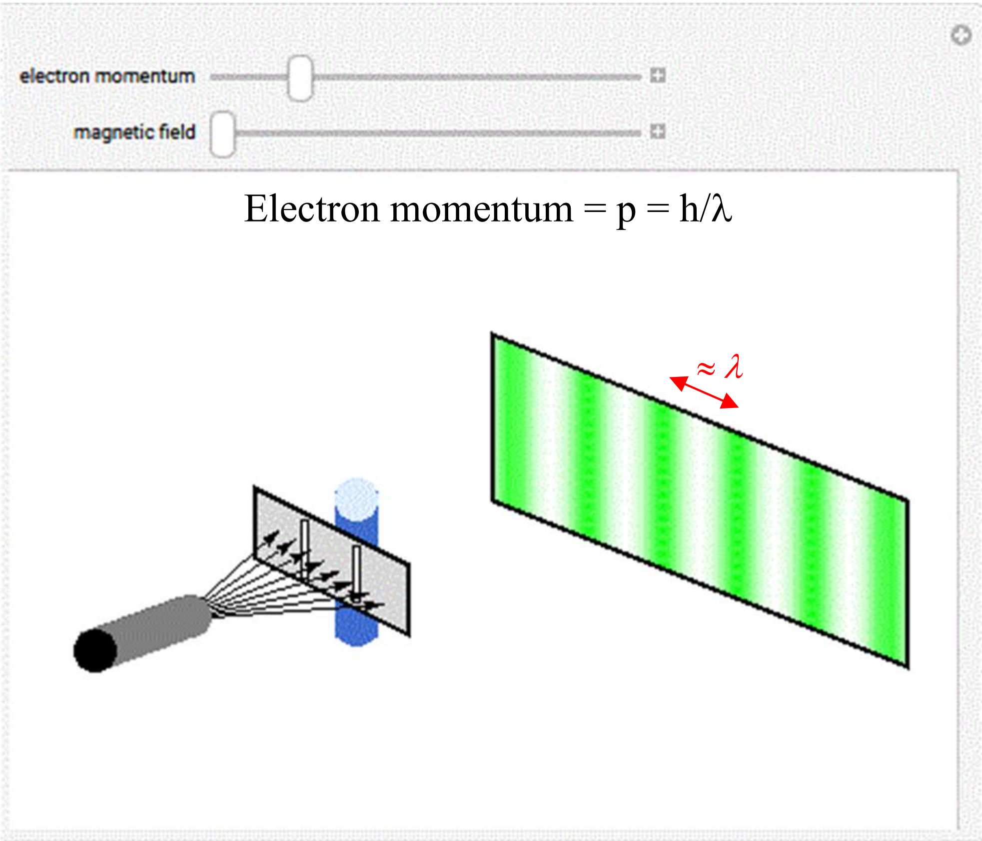
Modes propres: $e^{i\varphi_1} \cdot |\psi_1\rangle$ $\quad e^{i\varphi_2} \cdot |\psi_2\rangle$

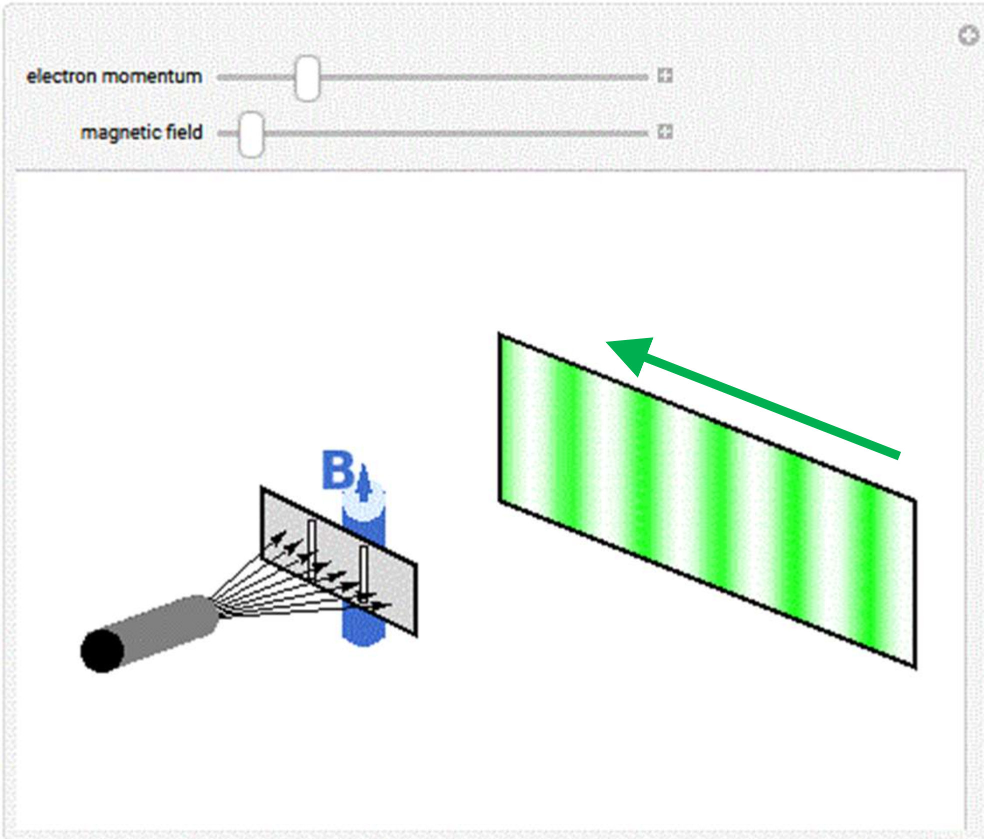
Phase de Berry $\boxed{\varphi = \frac{q}{\hbar} \cdot \int_0^x \vec{A} \cdot d\vec{l}}$

$$\Delta\varphi \equiv \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{\hbar} \cdot \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{\hbar} \cdot \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\hbar} \phi_{mag}$$

Simulations:
interférences d'électrons

$\vec{B} = 0$ $\vec{B} > 0$





https://demonstrations.wolfram.com/AharonovBohmEffect/

$$\Delta\varphi = 2\pi \cdot \frac{\phi_{mag}}{\phi_0}$$

$$\phi_0 \equiv \left(\frac{h}{q}\right)$$

Magnetic Flux Quantum

Opérateurs:

Mesure singulière
Moyenne
Variance

Opérateurs quantiques: définition

Un «opérateur» est une

manipulation mathématique de la fonction d'onde

Opérateurs pour la propagation de la fonction d'onde

Hamiltonien:

$$\boxed{H}$$

Schroedinger:

$$\boxed{i\hbar \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left|\psi\right\rangle = H \cdot \left|\psi\right\rangle}$$

Propagateur:

$$\boxed{U \equiv e^{-i \cdot \frac{H}{\hbar} \cdot t}}$$

$$\boxed{\left|\psi(x,t)\right\rangle = U \cdot \left|\psi_0\right\rangle}$$

Opérateurs de mesure

Vecteur position: $X = x$ $Y = y$ $Z = z$

Vecteur impulsion: $P_x = -i\hbar \cdot \frac{\partial}{\partial x}$ $P_y = -i\hbar \cdot \frac{\partial}{\partial y}$ $P_z = -i\hbar \cdot \frac{\partial}{\partial z}$

Energie: $E = i\hbar \cdot \frac{\partial}{\partial t}$

Moment cinétique $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$

Spin, polarisation $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Modes propres d'un opérateur A

Opérateur A

$$A \cdot \left| \varphi_i \right\rangle = \lambda_i \cdot \left| \varphi_i \right\rangle$$

Modes propres $\left| \varphi_i \right\rangle$

Valeurs propres λ_i

«base orthonormée»

$$\left\langle \varphi_i \middle\| \varphi_j \right\rangle = \delta_{ij}$$

Mesure singulière

Lors de chaque mesure singulière

la fonction d'onde «collapse»

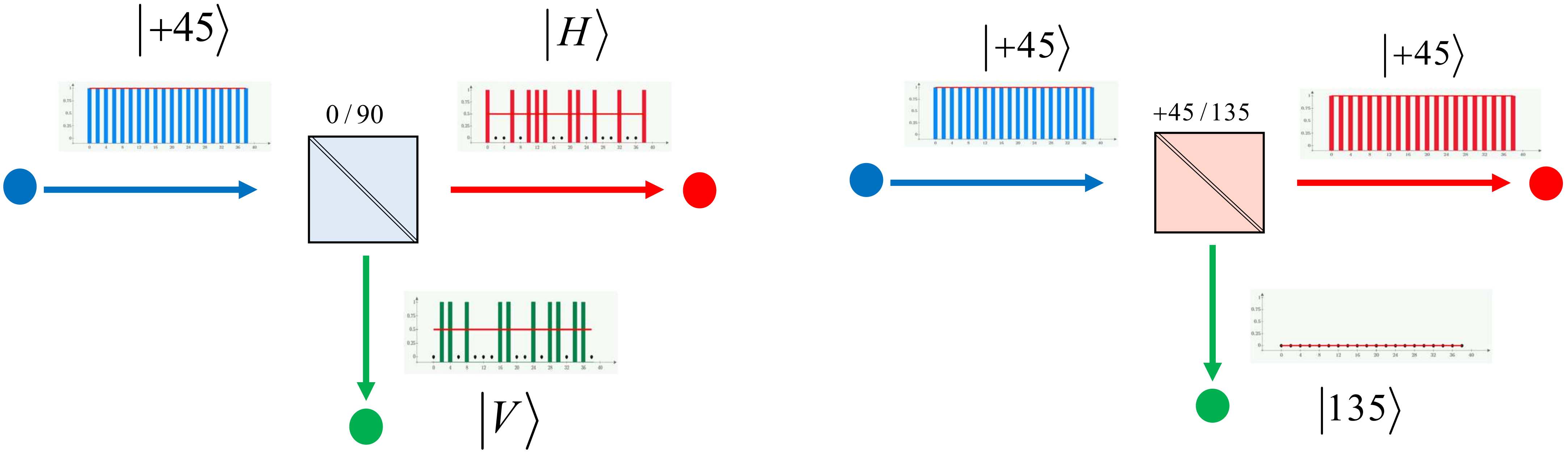
sur un des modes propres

de l'appareil de mesure

⇨ **La fonction d'onde d'origine est détruite et**

devient <u>instantanément</u> celle d'un mode propre

Exemple de projection: polarisateurs



L'instrument de mesure fait partie de la mesure.
Il détermine les modes propres qui peuvent être obtenus à la sortie

Etat superposé: Décomposition en modes propres

Décomposition de la fonction d'onde dans la base orthonormée:

$$\left|\psi\right\rangle = \sum_i \alpha_i \cdot \left|\varphi_i\right\rangle \quad \text{avec} \quad \alpha_i \equiv \left\langle\varphi_i\right|\left|\psi\right\rangle$$

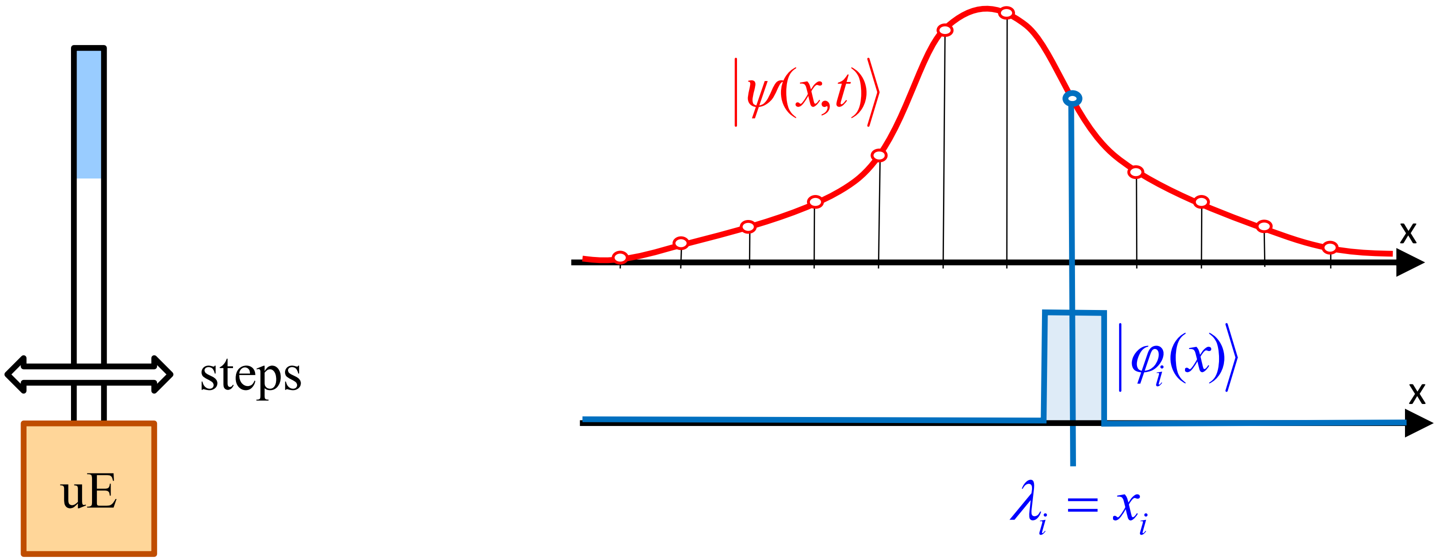
Probabilité de collapser sur le mode propre $\left|\varphi_i\right\rangle$ = probabilité de mesurer la valeur λ_i

$$\left|\alpha_i\right|^2 = \left|\left\langle\varphi_i\right|\left|\psi\right\rangle\right|^2$$

Condition de normalisation:

$$\left\langle\psi\right|\left|\psi\right\rangle = 1 \quad \Rightarrow \sum_i \left|\alpha_i\right|^2 = 1$$

Exemple: opérateur position X



$$\left|\varphi_i(x)\right\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1_i \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X \cdot \left|\varphi_i(x)\right\rangle = x_i \cdot \left|\varphi_i(x)\right\rangle$$

Moyenne sur un grand nombre de mesures

Moyenne des mesures de la grandeur A:

$$\langle A \rangle \equiv \sum_i |\alpha_i|^2 \cdot \lambda_i$$

Probabilité de collapser sur $|\varphi_i\rangle$

Valeur mesurée lors d'un collapser sur $|\varphi_i\rangle$

$$\langle \psi | A | \psi \rangle = \langle A \rangle$$

$$\langle \psi | A | \psi \rangle = \left(\sum_i \alpha_i^* \langle \varphi_i | \right) A \left(\sum_j \alpha_j | \varphi_j \rangle \right) = \left(\sum_i \alpha_i^* \langle \varphi_i | \right) \left(\sum_j \alpha_j A | \varphi_j \rangle \right) = \sum_{ij} \alpha_i^* \alpha_j \cdot \lambda_j \langle \varphi_i || \varphi_j \rangle = \sum_i |\alpha_i|^2 \cdot \lambda_i = \langle A \rangle$$

PAB

Valeurs moyennes d'un opérateur A

Fonction d'onde normalisée:

$$\langle \psi \| \psi \rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x,t) \cdot \psi(x,t) \cdot dx = 1$$

Moyenne d'un opérateur:

$$\boxed{\langle A \rangle \equiv \langle \psi | A | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x,t) \cdot A \cdot \psi(x,t) \cdot dx}$$

Second moment d'un opérateur:

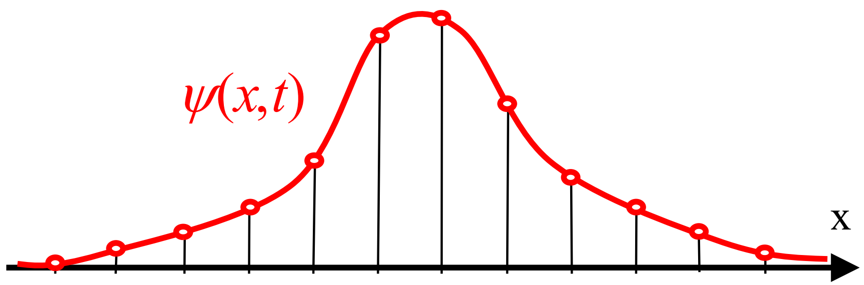
$$\boxed{\langle A^2 \rangle \equiv \langle \psi | A^2 | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x,t) \cdot A^2 \cdot \psi(x,t) \cdot dx}$$

Variance (incertitude) d'un opérateur:

$$\boxed{\Delta A^2 \equiv \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}$$

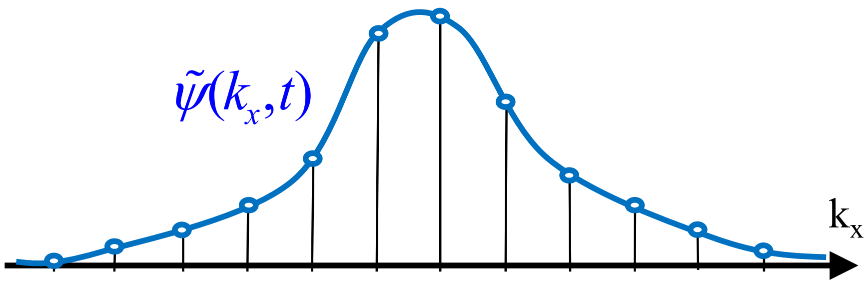
Exemples

Position X



Fourier $\Rightarrow$

Impulsion P_x



$$\langle x \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x,t)\cdot x \cdot \psi(x,t)\cdot dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x,t)\cdot \psi(x,t)\cdot dx}$$

$$\langle p_x \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x,t)\cdot \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right)\cdot \psi(x,t)\cdot dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x,t)\cdot \psi(x,t)\cdot dx} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}^*(k_x,t)\cdot \left(\hbar k_x\right)\cdot \tilde{\psi}(k_x,t)\cdot dk_x}{\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}^*(k_x,t)\cdot \tilde{\psi}(k_x,t)\cdot dk_x}$$

PAB

Incertitudes de Fourier et d'Heisenberg

Incertitudes de Fourier pour des ondes

$$\Delta t \cdot \Delta\omega \geq \frac{1}{2} \qquad \Delta x \cdot \Delta K_x \geq \frac{1}{2}$$

Incertitudes d'Heisenberg

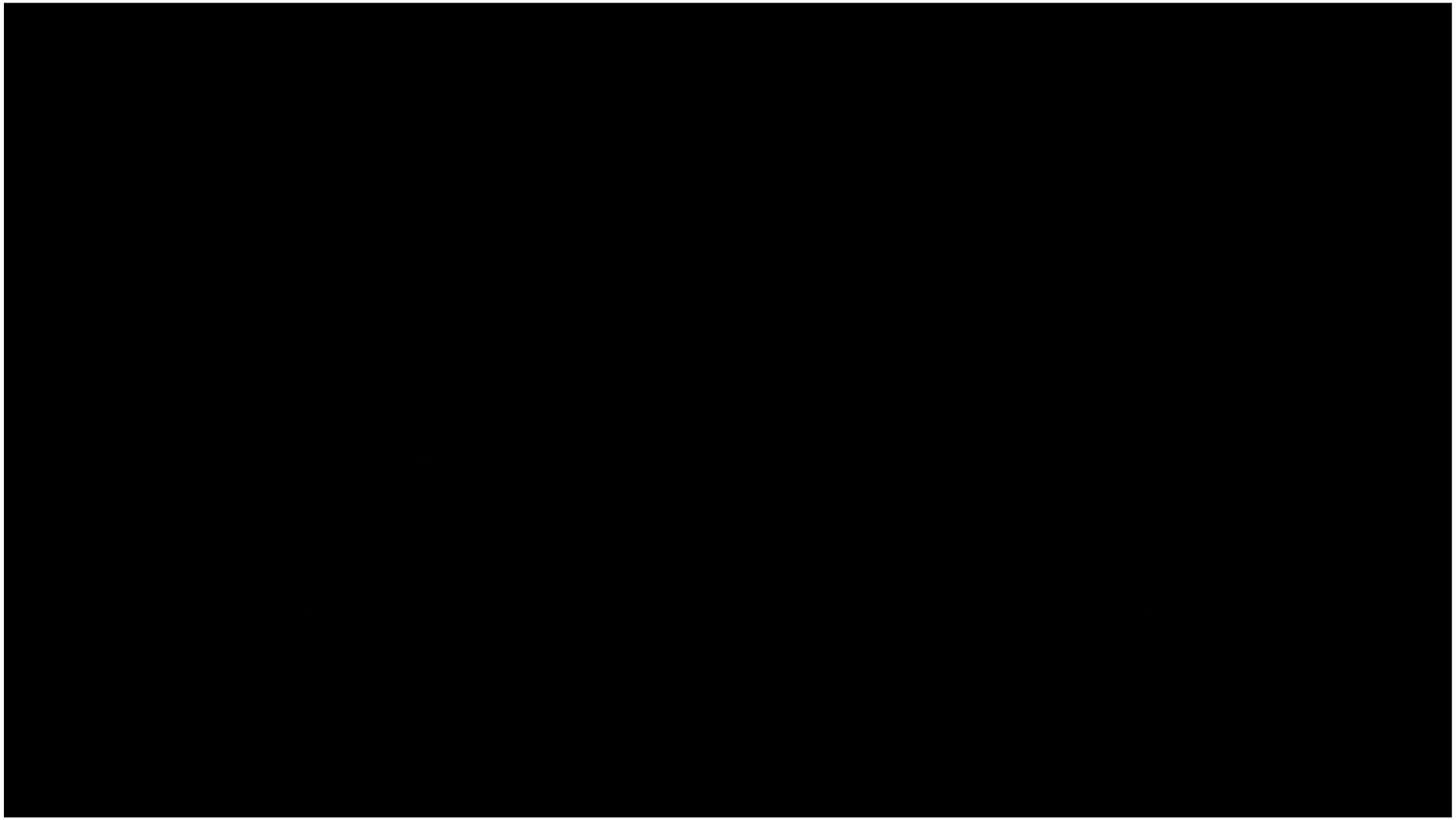
$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta t \cdot \Delta E \geq \frac{\hbar}{2} \qquad \Delta y \cdot \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta z \cdot \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2}$$

Visualisation de la physique quantique

https://youtu.be/p7bzE1E5PMY



Exercice 2.1 : équation de Schroedinger pour les photons

Opérateurs quantiques: $E \equiv i\hbar \cdot \frac{\partial}{\partial t} \cdots$ $\qquad \vec{P} \equiv -i\hbar \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdots, \quad \frac{\partial}{\partial y} \cdots, \quad \frac{\partial}{\partial z} \cdots \right)$

Expression de l'énergie d'un photon: $E = \hbar\omega = \hbar \cdot 2\pi \cdot \frac{c}{\lambda} = c \cdot \hbar |k| = c \cdot |\vec{p}|$

- **Réécrivez cette expression pour le carré de l'énergie.**
- **Appliquez les opérateurs quantiques**
- **Quelle équation obtenez-vous ?**

Exercice 2.2: opérateurs

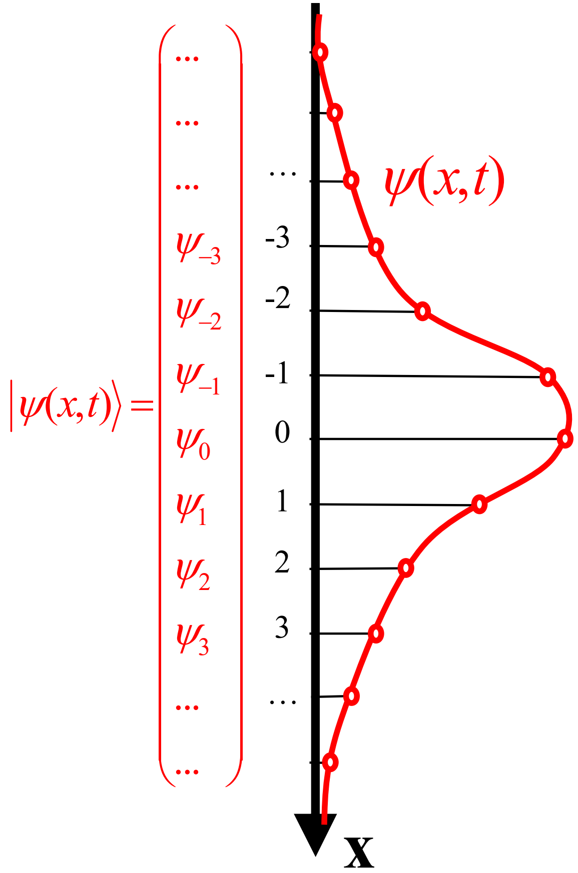
Considérez la fonction d'onde ci-contre:

Comment exprimer sous forme de matrice:

1) l'opérateur X (position) ?

2) l'opérateur P (impulsion)

«Ket»



PAB

Exercice 2.3: Opérateurs moments cinétiques

Expressions classiques:

$$\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$$

Trouvez les opérateurs quantiques correspondant à:

$$L_x = ?$$

$$L_y = ?$$

$$L_z = ?$$

Exercice 2.5: «Propagateur»

Propagateur: $\boxed{U \equiv e^{-i\cdot\frac{H}{\hbar}\cdot t}}$

1) Utilisez le développement de Taylor pour définir l'exponentielle d'un opérateur

2) Quel est le résultat si $\vec{\vec{H}} = \Gamma \cdot \vec{\vec{\sigma}}$ avec $\vec{\vec{\sigma}}^2 = \vec{\vec{1}}$